数理解析研究所講究録
63巻 1969年 15-34

接続問題について

京大 数研　大久保 謙二郎

§1. 序

常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad \left(\begin{array}{l} x \text{ は } n \text{ 次元ベクトル} \\ t \text{ は複素変数} \end{array}\right)$$

において初期値 $t=0$, $x=x_0$ で右辺が正則であれば，存在定理により，t_0 の近傍で $(t-t_0)$ の巾に展開される解があり，その解析接続も又解である。だから複素領域では，特異点に関する問題が興味の対象となる。解の全平面における行動を考察するのには，まず各特異点の近傍での局所的な解の表現から出発して，次に点 $t=a$ である行動を示す解が，別の特異点 $t=b$ でどの様にふるまうかを調べる必要がある。これを接続問題という。一般に非線型方程式では，動く特異点が現われる可能性があって，研究が困難であるので線型の場合についてのみ述べる。この場合には点 $t=a$ における基本解系と，$t=b$ における基本解系との一次結合を与える行列を計算することになる。

勿論，話を微分方程式に限定する必要はなく，一般にある点の近傍で与えられた函数要素が，解析接続されて特異点の近くでどの様なふるまいをするかという問題は整函数論にあっては基本的な問題である。微分方程式では，函数要素の与え方を，考える方程式の解とするだけの話で，巾級数展開として解が与えられれば，あとは整函数の理論となってしまう場合もある。

§2. 例

例1。　ガウスの微分方程式

$$t(1-t)\frac{d^2x}{dt^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)t\right]\frac{dx}{dt}-\alpha\beta x=0$$

は $t=0,1,\infty$ に確定特異点を持ち，各点で二つの独立な解の組

$$\begin{cases}\varphi_0 = 1+O(t) \\ \psi_0 = t^{1-\gamma}\{1+O(t)\}\end{cases} \qquad (t=0)$$

$$\begin{cases}\varphi_1 = 1+O(t-1) \\ \psi_1 = (t-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\{1+O(t-1)\}\end{cases} \qquad (t=1)$$

$$\begin{cases}\varphi_\infty = t^{\alpha}\{1+O(\frac{1}{t})\} \\ \psi_\infty = t^{\beta}\{1+O(\frac{1}{t})\}\end{cases} \qquad (t=\infty)$$

を持つことが容易に確かめられる。接続問題とは，これらの解の間の一次関係，たとえば

$$\begin{cases} \varphi_0 = c_1\varphi_1 + d_1\psi_1 \\ \psi_0 = c_2\varphi_1 + d_2\psi_1 \end{cases}$$

を計算することである。この場合上の関係式を接続公式という。接続公式を計算することは、この場合方程式のモノドロミー群を計算することになっていることを注意しよう。

例2. Weberの方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} - t^2x = \lambda x$$

は $t=\infty$ を真性不確定特異点として持つ解がある。解を実軸上に限定して $t\to\pm\infty$ で各々

$$\begin{cases} \varphi_1 = O(e^{-\frac{t^2}{2}}) \\ \psi_1 = O(e^{\frac{t^2}{2}}) \end{cases} \qquad (t\to+\infty)$$

$$\begin{cases} \varphi_2 = O(e^{-\frac{t^2}{2}}) \\ \psi_2 = O(e^{\frac{t^2}{2}}) \end{cases} \qquad (t\to-\infty)$$

というふるまいをする独立解の組が存在することが、局所的な不確定特異点の議論から確かめられる。接続公式

$$\varphi_1 = c\varphi_2 + d\psi_2$$

が計算出来たとしよう。こゝで、c, d は共に方程式のパラメーター λ に関係してきまる定数である。

たとえば，$(-\infty,\infty)$ において可積分な解が存在するためのパラメーターの値を計算するには，$\alpha(\lambda)=0$ とおけば良い。勿論，これは特異境界値問題における固有値の分布を与えることになる。

この様に接続公式の係数を計算するのに，単に数値解析的な手段を用いて腕づくで計算するのが無意味な場合が多いので，以下の議論では数値的なことは議論しない．又例1の場合でも，$t=0$ での巾級数展開と $t=1$ の巾級数展開の収束円が重なるから，そこで数値計算をすれば，接続公式は計算されるのは自明の理である。

例3．例2の基本解のなかで φ_1 と φ_2 が同じ解でないというのが必ずしも自明の理ではないことを示すために次の方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt}-2tx=1$$

解

$$x_0(t)=-e^{t^2}\int_t^{\infty}e^{-\tau^2}d\tau$$

は部分積分を一回して積分を評価すればわかる様に t が正の方向で ∞ に近附くとき

$$x_0(t)=O\left(\frac{1}{t}\right)\qquad(t\to+\infty)$$

となる解である。一寸積分と書き直して

$$x_0(t) = -e^{t^2}\int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau + \int_0^t e^{t^2-\tau^2}d\tau$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{t^2} + e^{t^2}\int_0^t e^{-\tau^2}d\tau$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{t^2} - e^{t^2}\int_{-\infty}^0 e^{-\tau^2}d\tau + e^{t^2}\int_{-\infty}^t e^{-\tau^2}d\tau$$

$$= -\sqrt{\pi}\,e^{t^2} + e^{t^2}\int_{-\infty}^t e^{-\tau^2}d\tau$$

とすれば，右辺第二項は $t\to-\infty$ で $O(\frac{1}{t})$ であるが第一項は無限に大きい項であって

$$\lim_{t\to+\infty} x_0(t) = 0$$

であっても

$$\lim_{t\to-\infty} x_0(t) = -\infty$$

となってしまう。Ce^{t^2} が同次方程式の一般解であることを考えに入れると，t が正と負の場合(特殊解) $\sum_1^\infty b_n t^{-n} + Ce^{t^2}$ における定数 C の値が変化していることになる。

一般に

$$\frac{dx}{dt} = \left(A + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)x$$

という形の線形方程式では，$t=\infty$ は不確定特異点であって

$$x(t) = O(e^{\lambda t}t^{\mu}) \qquad t\to+\infty$$

という形の解が存在しても，$t \to -\infty$ では異なる行動を示す，これをStokes現象という。

不確定特異点におけるStokes現象の存在は，たとえば量子力学におけるトンネル効果や，流体力学での層流と乱流の転移の問題と密接な関係がある。又応用上の重要性と同時に，数学的にも非常に複雑な性格をはらんでいて，その解明は三階以上の方程式にあっては，ほとんど手のつけようもない曖昧さを含んでいる。

§3. 接続問題に使われる手法.

解の大域的性質を調べるには，多価解の表現が重要な役割を演ずる。古典的な方程式の接続公式がほとんど積分表示から生まれている様に，基本的には，解の大域的表現はすべて積分表示に帰着される様に思われるが，方程式によってあまりにも多様な積分表示があって，特殊函数論を混乱せしめているので，こゝではむしろ積分表示を影の主役にして話をすゝめる。

a. 常套的積分表示. これは歴史的に有用であることが確かめられているLaplace変換，Fourier変換等を用いるもので，あたかも万能の様に思われているが，必ずしも役にたたない例をあげることにしよう。

系
$$t\frac{dX}{dt} = (A+tB)X$$

を考える。 $t=0$ は確定特異点で行列 A の固有値 $\rho_1,\cdots,\rho_n$ に整数差のものがない（$\rho_j-\rho_k\equiv 0$ となるのは $j=k$ にかぎる）と仮定すれば

$$X_j(t) = t^{\rho_j}\sum G_j(m)t^m \qquad (j=1,2,\cdots n)$$

という収束する n 個の解ベクトルが存在する。一方 $t=\infty$ は一位の不確定特異点で B の固有値 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ が相異なるものとすれば

$$X^k(t)\sim e^{\lambda_k t}t^{\mu_k}\sum_{s=0}^{\infty} H^k(s)t^{-s} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

という形の収束しない形式解が存在して，$\arg t$ を充分せまい範囲で，任意に固定すれば，$t\to\infty$ で

$$\tilde{X}^k_\theta(t)\cong X^k(t) \qquad (|\arg t-\theta|<\delta)$$

となる解が存在する。接続問題は

$$X^k_\theta(t)=\sum_{j=1}^{n} S_j^k(\theta,\theta')X^j_{\theta'}(t)$$

となる $S_j^k(\theta,\theta')$ を計算する一点接続と，

$$X_j(t)=\sum_{k=1}^{n} T_j^k(\theta)X^k_\theta(t)$$

となる $T_j^k(\theta)$ を計算する二点接続問題と二つあり，$T_j^k(\theta)$, $S_j^k(\theta,\theta')$

共に変数 θ, θ' についての不連続函数である。Poincaré, Birkhoff は二人とも Laplace 変換を用いて、

$$(1) \qquad X(t) = \int_C e^{t\sigma}\Phi(\sigma)\,d\sigma$$

という形の積分表示を求めた。方程式に直接代入して、

$$0 = \Big[(B-\sigma)\Phi(\sigma)e^{t\sigma}\Big]_C + \int_C e^{t\sigma}\Big[(A-I)\Phi(\sigma) - (B-\sigma)\Phi'(\sigma)\Big]\,d\sigma$$

だから積分路 C を

$$(2) \qquad \Big[(B-\sigma)\Phi(\sigma)e^{t\sigma}\Big]_C = 0$$

$\Phi(\sigma)$ を系

$$(3) \qquad (B-\sigma)\Phi'(\sigma) = (A-I)\Phi(\sigma)$$

の解とすれば良い。(2) が成立して (1) が 0 とならぬ様な C は系 (3) の $\sigma=\lambda_k$ で多価な解をとって、∞ から ∞ に $\sigma=\lambda_k$ を一周してかえる道として良い。一方 $\Phi(\sigma)$ は ∞ を確定特異点として持つから、C は $-\arg t$ の方向に沿っていなければならない。

たとえば C が実軸の負の部分に沿って ∞ に行くならば、(2) は $\mathrm{Re}\, t>0$ でのみ成立する。つまり半平面で解を表現するが $t=0$ の全近傍を内部に含み得ないから接続問題に役に立つ大域的な解の積分表示ではない。

大域的な積分表示を求めるには、多価性を持つ部分 t^{ρ_j} を外において

$$(1)' \quad x_j(t) = t^{\rho_j}\int_C e^{\sigma t}\Phi_j(\sigma)\,d\sigma$$

という表示を試みると,

$$(2)' \qquad \left[\,(B-\sigma)\,t^{\rho_j}\,\Phi_j(\sigma)\,e^{t\sigma}\,\right]_C = 0$$

$$(3)' \qquad (B-\sigma)\frac{d\Phi_j}{d\sigma} = (\,A-(\rho_j-1)I\,)\,\Phi_j$$

の二つの条件より, $\sigma=\infty$ で1価な解 $\Phi_j(\sigma)$ を定めると $(1)'$ が解を任意の t に対して表示する。

一方 $\Phi_j(\sigma)$ は $\sigma=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ に確定特異点を持つから $\sigma=\infty$ で一価な解が $\sigma=\lambda_k$ でどの様なふるまいをするか, つまりもとの系の接続問題が, 積分変換によって, 新らしい系 $(3)'$ の接続問題におきかえられるわけである。特に系の次元が2のとき $(3)'$ は初等積分可能であるので, この場合は両方の系に対する接続問題は完全にとける。

b. 差分方程式を用いる方法. 函数要素としての解は普通収束する巾級数によって与えられる。巾級数が微分方程式の解であるならば, その係数の満足するのは差分方程式であり係数のふるまいがわかれば, 函数乃至は解のふるまいも又わかるはずである。先程の例をかんたんに論じよう。

$t=0$ における確定解

$$X_j(t) = t^{\rho_j}\sum_{m=0}^{\infty} G_j(m)\, t^m \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

の係数 $G_j(m)$ は

$$(\rho_j + m - A)\, G_j(m) = B\, G_j(m-1) \tag{5}$$

を満足する。

差分方程式の理論によれば (5) は $m \to +\infty$ で

$$G_j^k(m) \cong \frac{\lambda_k^m}{\Gamma(\rho_j + m - a_{kk} + 1)} H^k(0)\left\{1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right\} \tag{6}$$

というふるまいをする n 個の一次独立な解がある。(5) の初期値問題

$$G_j(m) = \sum_{k=1}^{n} T_j^k G_j^k(m)$$

がとければ，あとに述べる W-F-N-H 理論によって

$$X_j(t) \cong \sum_{k=1}^{n} T_j^k X^k(t) \qquad \left(\bigcap_{k=1}^{n}\{t;\ |\arg \lambda_k t| < \tfrac{3}{2}\pi - \delta\}\right)$$

という形で接続問題の解が求められる。

この場合，差分方程式 (5) の一次独立な n 個の解 (6) が，理論上は漸近的にしか与えられずに正確な値をある固定した m の値について計算するためには，積分表示の様なものを計算する必要があるので，必ずしも常に成功するとは限らず，

方程式の形に依存する。この例については，積分表示

$$G_j(m) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_C \sigma^{m-1} V(\sigma)\, d\sigma$$

を用いて，差分方程式を解くことが出来るので，比較的容易である。

係数の漸近的性質から函数の漸近的性質を導くのは整函数論における中心的問題であるが，微分方程式論における様な精細な結果は得られていない様に思われる。又，差分方程式の解の持つ周期１の函数の不定性が接続公式に及ぼす影響を詳細に論じている研究がないので，第４節で，その事を論ずる。

C．初等解の構成による方法．

１９１３年，J. Hadamard は order 0 の Bessel 函数を不完全ガンマ函数で展開し，G. N. Watson はそれを任意の order の場合に拡張した。近年，大久保，河野はその手法を高階単独の方程式や，系の場合に用いて，特異点を 0，∞ に持つ場合の一般論を展開している。

再び前の例にもどる。この方法の骨子は，各特異点において指定されたふるまいを示すもっとも簡単な函数を作り，それを用いて解を展開するというところにある。この場合

$$t\frac{dx_j^k(t,s)}{dt} = (\lambda_k t + a_{kk} - \rho_j - s)\, x_j^k(t,s) + c_j^k$$

という微分方程式の解で $t=0$ で一価正則なものを $x_j^k(t,s)$ としよう。簡単な計算から

$$t^{\rho_j} x_j^k(t,s) \cong e^{\lambda_k t} t^{a_{kk}-s} + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad \left(t \to \infty \quad |\arg \lambda_k t| < \frac{3}{2}\pi\right)$$

となることがわかるから形式解 $X^k(t)$ を構成するためには，

$$X^k(t) \sim e^{\lambda_k t} t^{a_{kk}} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) t^{-s}$$

の係数 $H^k(s)$ を用いて

$$t^{\rho_j} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) x_j^k(t,s) = \xi_j^k(t)$$

とすれば，ほとんど形式解と同じふるまいをする函数 $\xi_j^k(t)$ を作ることが出来る。勿論 $\xi_j^k(t)$ 自身は解でなく，その一次結合

$$\sum_{k=1}^{n} T_j^k \xi_j^k(t)$$

が始めて解になる。展開 $\xi_j^k(t)$ が収束することを示すにはパラメーター ε を導入して

$$\sum H^k(s) x_j^k(t,s) \varepsilon^s = \Xi(t,\varepsilon)$$

を作りその満足する微分方程式（ε についての）の特異点の分布を調べることにより $\varepsilon=1$ とした場合の収束性を調べる。

この方法は

$$\frac{dX}{dt} = \left(\sum_{r=0}^{N} A_r t^r\right) X$$

乃至は

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) \frac{d^{n-k} x}{dt^{n-k}} = 0$$

$$\left(p_k(t) = \sum_{r=-k}^{N_k} p_{kr} t^r \right)$$

の形の系について有効である。（[ ]，[ ]）

一方特異点の数が3又はそれ以上の場合，簡単な初等解を構成するのが困難なために今のところ特異点の数が2の場合にのみ用いられている。

§4. 差分方程式の解の任意性について。

係数の漸近的なふるまいが与えられた巾級数の行動を記述するための方法は整函数論における indicatrix や order の議論があるが，微分方程式論ではもっと詳しい記述が必要であって，いろいろの方法が考えられている。古くは Perron や Koch の無限行列の議論，それを整函数に拡張した Wittich 等の研究（[ ]）等がある。ここでは主に Barnes Integral とよばれる超幾何函数の積分表示と，いわゆる W-F-N-H 理論との関連において，微分方程式の解として与えられた級数を考察することにする。

今 $\mu(w)$ を $w=0,1,2,\cdots$ に位数1の極を持ち，そこで留数が1である函数とする。たとえば

$$\mu(w)=2\pi i\,(e^{2\pi i w}-1)^{-1}$$

はその様な函数である。与えられた巾級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^n$$

の係数 $g(n)$ が複素平面での解析函数として拡張されるものと

すれば，それを同じ記号 $g(w)$ で書くことにより，積分

$$F(z)=\int_C \frac{1}{2\pi i}\,\mu(w)\cdot g(w)\,z^{w}\,dw$$

を考える。ここに積分路 C は $\mu(w)$ の極 $w=0,1,2,\cdots,n,\cdots$ を内部に含む様な道であるとする。 $g(w)$ の C 内にある極を $\{\beta_j\}$ とすれば

$$F(z)=f(z)+\sum_j\{\mathrm{Res}\,g(w)\}_{\beta_j}\,z^{\beta_j}$$

である。

$z\to\infty$ における $f(z)$ の行動を記述するには，積分路 C を適当に変形することが出来れば，たとえば C が虚軸に平行な直線で，原点から充分遠い所での $F(z)$ の積分が充分小さいという仮定の下に右半平面での積分と左半平面での積分になおして

$$F(z)\sim\sum g(-n)\,z^{-n}$$

の形に書き直せる可能性がある。

以上に述べた様な仮定はすべて，$g(w)$ の growth order と，$\mu(w)$ の選択に依存するので，いろいろな $g(w)$ に対して適当な $\mu(w)$ を定める必要があり，その任意性が最終的な結果に影響を及ぼさないという保証も必要である。これらの議論が所謂 W-F-N-H 理論であって，その大要は数年前に紹介した。

微分方程式の接続問題に W-F-N-H 理論を応用する際の最大の

障害となるのは、$g(x)$の解析的延長をdiscreteなnからcontinuousなw-平面にどの様にして行なうかという問題である。これが以外に複雑な問題となっていることは、Bohr-Mollerupの定理"$xg(x)=g(x+1)$の解で(1) $x>0$でlogarithmically convex (2) $g(0)=1$である実数値解はΓ-函数に限る"を見れば明らかであろう。

幸いなことには差分方程式を複素領域で考える理論はすでに多項式係数の場合G.D. Birkhoffが次の形で解決している。

差分方程式系

$$g(x+1)=A(x)g(x)$$

で$A(x)$は多項式を要素とするn行n列の行列で

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\mu}A_k x^{\mu-k}$$

という展開の主要部A_0は相異なる固有値を持つものとする。これらを$\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$とすると形式解の行列

$$\mathcal{S}(x)=x^{\mu x}S(x)\begin{pmatrix}(\rho_1e^{-\mu})^x x^{r_1} & 0 & & 0\\ 0 & (\rho_2e^{-\mu})^x x^{r_2} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & (\rho_n e^{-\mu})^x x^{r_n}\end{pmatrix}$$

が存在する。　$S(x)\sim\sum_{r=0}^{\infty}S_r x^{-r}$

このとき2つの基本解行列$G(x)$及び$H(x)$があって左右各半面で$\mathcal{S}(x)$に漸近的で、あるdiscreteな点集合を除いて正則な解の行列となる。

二つの解行列は周期1の周期函数を要素とする行列$P(x)$に

よって

$$G(x) = H(x)\,P(x)$$

という一次関係を持つ $P(x)$ の $(j.k)$ 要素 $p_{jk}(x)$ の形は

$$\begin{cases} p_{jj}(x) = 1 + \sum_{l=1}^{\mu-1} c_{jj}^{(l)} e^{2\pi i l x} + e^{2\pi \gamma_j i} e^{2\pi \mu i x} \\ p_{jk}(x) = e^{2\pi \lambda_{jk} i x} \sum_{l=0}^{\mu-1} c_{jk}^{(l)} e^{2\pi i l x} \end{cases}$$

$$\lambda_{jk} = \left[\mathrm{Re} \frac{1}{2\pi i} (\log \rho_j - \log \rho_k) \right]$$

たとえば Γ-函数の場合に上記の定理を応用する。

$$g(x+1) = x\, g(x)$$

であるから $\mu=1$, $n=1$, $\rho=1$, 簡単な計算から $\gamma = -\frac{1}{2}$, であるから, ~~右~~左半平面で

$$G(x) \cong e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \{ 1 + O(\tfrac{1}{x}) \}$$

となる解析的な解と, 右半面で

$$H(x) \cong e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \{ 1 + O(\tfrac{1}{x}) \}$$

となる解が存在する。Γ-函数に対する Stirling の公式

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} (1 + O(\tfrac{1}{x}) \} \quad (x \to +\infty)$$

から

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, H(x)$$

が成立する。一方 $H(x)$ と $G(x)$ の関係式は

$$G(x) = (1 - e^{2\pi i x}) H(x)$$

は $\Gamma(x)$ の負の実軸上の展開が

$$\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \frac{1}{\Gamma(1-x)} \cong \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - e^{2\pi i x}} \{ 1 + O(\tfrac{1}{x}) \}$$

から与えられることと一致する。

この様にして微分方程式の解として与えられた巾級数の係数が、解析的に拡張され、任意性は周期1の周期函数に限り、その形を決めれば、右半平面から左半平面に解析接続可能であることがわかった。

以下の議論は一般に $t=0$ と $t=\infty$ に確定特異点を持ち、その他の有限な所にある特異点が全て確定特異点である様な方程式に拡張出来るのであるが、接続公式がわかっているという点で理解し易い Gauß の方程式

(1) $$t(1-t)\frac{d^2x}{dt^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)t]\frac{dx}{dt}-\alpha\beta x=0$$

について論ずることにする。まず方程式(1)を

(1)′ $$\frac{1}{t}\left[t^2\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma t\frac{dx}{dt}\right]=t^2\frac{d^2x}{dt^2}+(\alpha+\beta+1)t\frac{dx}{dt}+\alpha\beta x$$

という形に書くことにする。微分作用素 $\delta=t\frac{d}{dt}$ を用いると、

(1)″ $$\frac{1}{t}\delta(\delta-(1-\gamma))x=(\delta+\alpha)(\delta+\beta)x$$

とかける。

$t=0$ で正則な解

(2) $$x(t)=\sum_{m=0}^{\infty}g(m)t^m$$

の $t=\infty$ におけるふるまいを論じよう。$t=\infty$ には二つの独立な確定解

(3) $$\begin{cases} x_\alpha(t)=t^{-\alpha}\sum h_\alpha(s)t^{-s} \\ x_\beta(t)=t^{-\beta}\sum h_\beta(s)t^{-s} \end{cases}$$

が存在して，係数 $h_\alpha(s)$，$h_\beta(s)$ は各々差分方程式

$$
(4)\quad \begin{cases} (-s)(-\alpha+\beta-s)h_\alpha(s) = (-\alpha-s+\gamma)(-\alpha-s+1)h_\alpha(s-1) \\ (-s)(-\beta+\alpha-s)h_\beta(s) = (-\beta-s+\gamma)(-\beta-s+1)h_\beta(s-1) \end{cases}
$$

を満足し，$g(m)$ は

$$
(5)\quad (-m+1)(m-\gamma)g(m+1) = (m+\alpha)(m+\beta)g(m)
$$

を満足する。ところが (4) で $-s-\alpha=m$ ~~$s=m+1+\alpha-\gamma$~~ とおくと，実は同一の方程式で変数をおきかえたものにすぎぬことがわかる。

差分方程式

$$
(6)\quad (w+1)(w-\gamma)g(w+1) = (w+\alpha)(w+\beta)g(w)
$$

の左半平面における解を $G(w)$，右半平面における解を $H(w)$ とかくことにすると，

$$
\begin{cases} h_\alpha(s) = G(-s-\alpha) \\ h_\beta(s) = G(-s-\beta) \end{cases} \qquad g(m) = H(m)
$$

という式が成立する。勿論 $g(m)$ の解析的延長 $g(w)$ は $H(w)$ で与えることが出来る。又 $G(w)$ と $H(w)$ の関係は

$$
(7)\quad G(w) = \frac{[1-\exp\{2\pi i(w+\alpha)\}]\cdot[1-\exp\{2\pi i(w+\beta)\}]}{[1-\exp\{2\pi i w\}]\cdot[1-\exp\{2\pi i(w+\gamma)\}]} H(w)
$$

によって与えられる。

$$
(8)\quad x(t) = \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \frac{H(w)}{e^{2\pi i w}-1} t^w \, dw
$$

とおいて積分路を右半平面から左半平面に移して，(7) を用

いると簡単に接続公式を導くことが出来る。

今 $H(w)$ の決定に任意の周期1の周期函数 $\pi(w)$ が入るとすれば $\pi(w)$ の Fourier 展開を

$$\pi(w)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{2\pi i k w} \qquad \left(\pi(0)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_k = 1\right)$$

とすると，その効果は (7) における分子の零点から生ずる因数，（$w=-\alpha-s$ 又は $w=-\beta-s$ において）接続公式に

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_k \exp(-2\pi i k\alpha) , \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \exp\{-2\pi i k\beta\}$$

として生ずる。

これは原点で定義された解 $x(t)$ を A_k 倍して，0から1に至る cut を k 周してから解を∞に接続した結果とみなせる。つまり，任意の周期函数倍の任意性は積分路の任意性に帰着された訳である。

参考文献

[1.] Collected Mathematical Works　G. D. Birkhoff

[2] K. OKUBO　Stokes 現象 I，II　F.E口内版

[3] H. Wittich　Eindeutige Analytische Funktionen　Springer

[4] Bieberbach　Gewöhnlichen Differentialgleichungen　Springer

[5] Wilcox　Asymptotic Solutions of Differential Equations　Addison-Wiley

[6] Bachelder　An Introduction to linear Difference Equations　Dover